BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О СУЩНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ У Н.ТУСИ

А.А.БАБАЕВ, Э.М.МАМЕДОВ
Институт математики и механики НАН Азербайджана

В статье изучаются взгляды Н.Туси на основные понятия геометрии по его философскому произведению «Таджрид ал-э'тигад» («Абстрагирование веры») и по разным версиям его комментариев к «Основам» Евклида, а также исследуются вопросы существования, отношение равенства геометрических фигур, парадокс, подтверждающий противоречивость евклидовой системы аксиом равенства, эквивалентные формулировки пятого постулата о параллельных прямых[1].

В математических произведениях Н.Туси можно встретить такие термины как «реальны», «существует», «существование из необходимых», «доказательное существование», «сугубо положенческие вещи» и т.д. Чтобы точно понять какой смысл вкладывает сам Туси в эти понятия, необходимо изучение его философских взглядов, исследование логического и религиозного учения и даже психологии и мировоззрение того времени.

В этом смысле философское произведение Н.Туси «Таджридул-э'тигад» занимает особое место. Название книги буквально переводится как «Абстрагирование веры» или как «Чистая вера». Книга состоит из шести разделов. В первых двух разделах Н.Туси излагает свои взгляды касательно космоса, пространства, материи, времени, движения, вопросы существования и несуществования, конечности и бесконечности и приводит разные парадоксы и контрпримеры в пользу обоснования своих взглядов. А последующие разделы посвящены сугубо теологическим вопросам.

В течении веков это произведение многократно было переиздано и комментировано со стороны многих теологов, среди которых наиболее известны комментарии ученика Н.Туси ал-Хасан ибн Юсуф ал-Мутаххар ал-Хилли (ум. в 1322), под названием «Кешф ал-мурад» («Открытие желаний») [1]. Учитывая тот факт, что Хилли являлся непосредственно учеником Н.Туси, безусловно его комментарии наиболее точно отражают взгляды Н.Туси. В протяжении данной статьи мы неоднократно будем обращаться именно к этому произведению.

Основные понятия геометрии и вопросы существования

Точка. В [2 и 3] после евклидового определения «Точка есть то, что не имеет частей» имеется следующее продолжение, которое можно перевести как *«т.е.она из вещей сугубо положенческих»*. Без знания философских взгля-

[1]Переводы с арабского, приведенные в курсивах, произведены с Мамедовым Э.М.

дов Туси это могло бы быть переведено как «чистая формализация». А в [4] сделан близкий смысловой перевод: *«точку нельзя познать в отдельности, ее только можно представить с помощью вещей, обладающих формой».*

Чтобы понять смысл этого понятия обращаемся к шестому вопросу первой главы второго раздела ([1] стр. 222-223) посвященному вопросу отрицания существования неделимой частицы:

«Не имеется «самостоятельно существующая» неделимая частица». (стр222)

В то время господствовали разные взгляды относительно строения физических тел:

некоторые утверждали, что тела состоят из неделимых частиц. При этом часть придерживалась мнения в конечности, а другая часть в бесконечности этих частиц;

другие утверждали, что тела также слитны, как их воспринимают органы чувства. При этом часть придерживалась того мнения, что они раздробимы до конечного порядка, а другие, что они раздробимы бесконечно.

Туси отрицает атомистические взгляды и останавливается на утверждении: *«Таким образом, тело есть единое непрерывное, принимающее делимость без конца». ([1], стр.229).*

Что касается отрицания существования неделимой частицы в комментариях, имеется следующее предложение:

«и это из-за того, что неразделимое есть из вещей сугубо положенческих, которые суть вещи на которых можно указывать, но которые самостоятельно не существуют, как бытие точки на краю линии или центра круга, самостоятельное бытие которых невозможно.» ([1] стр222-223).

Таким образом становится ясен мировоззренческий взгляд Туси и почему точка познается не самостаятельно, а с помощью линии.

Прямая, круг, поверхность и вопросы их существования. Таким же образом и линия, и поверхность, в частности, плоскость, а также направление – все являются сугубо положенческими вещами. При этом Туси утверждает, что они реальны, факт который особо отмечается в [2 и 3] в части постулатов, где говорится:

«Говорю, что в первую очередь должно быть обусловлено, что точка, линия, поверхность, плоскость, прямая наиважным образом, а также круг реально существуют»..

В «Основах» Евклида это утверждение отсутствует. В [2] вместо «наиважным образом» написано (а в [3] может быть прочитано) «из этих (тех) двух» (на арабском «минхума»). Думаем, что эта опечатка писаря. В самом деле, перед этим перечислено пять названии, говорить о каких-то двух из них есть бессмыслица. Потому, с большой вероятностью можно утверждать, что версия «наиважным образом» (на арабском «мухимман», которого можно и спутать с «минхума») является точным. Что подтверждается и переводом Х.Зарриназаде [4 стр.9]. «Точка, прямая, поверхность, плоскость и круг суть *самые важные (наиважные)* понятия геометрии». Т.е. этот фрагмент Х.Зарриназаде тоже прочитал как «самые важные» или «наиважные».

Какой смысл вкладывает Туси в это утверждение. Обращаемся к четвертому вопросу пятой главы второго раздела [1], который посвящен вопросу о количествах:

«Крайи не являются несуществующими (небытием), несмотря на то что они описуемы и относительной принадлежностью» (стр. 305).

По мнению некоторых современников Туси, поверхность будучи границей тела, линия будучи границей поверхности, точка будучи границей линии не существуют во внешнем мире, так как граница есть место исчезновения или небытия рассматриваемого предмета. От комментариев становится ясен взгляд Туси на эти умозаключения: что на небытие нельзя указывать, в то время как на поверхность тела, на границу поверхности и на границу линии, т.е на концы линии, можно указывать. То что тело перестает быть тела в определенном направлении, не означает его небытие, а означает исчезнование одной из линейных размерностей, т.е. толщины.

А вторую часть данного тезиса – «несмотря на то, что они описуемы и относительной принадлежностью» надо понимать в том смысле, что употребима относительная принадлежность типа «поверхность тела», т.е. здесь поверхность относится к телу. Но эта относительная принадлежность вступает в роли второстепенного и отстающего, чем значения понятия тела и поверхности. Потому такая относительная принадлежность ни в коем случае не означает их небытие.

Существование чего-либо тоже имеет разные качественные стороны. Например, в двадцать седьмом вопросе той же главы [1], посвященном качествам, имеющим количественную характеристику, имеется следующее утверждение:

«Имеющие количественную характеристику бывают либо непрерывные как: направление, округленность, кривизна, вогнутость, выпуклость, фигура и форма,- либо дискретные как четность и нечетность (стр. 362).

Прямая есть наикратчайщая линия проведенная между двумя точками. Стоит отметить, что она существует также как и круг» (стр. 362-363).

Как говорится в комментариях это есть архимедово определение прямого отрезка, которое иногда называется лежандровым определением прямой [6, стр. 226-227], хотя в восточной литературе оно всегда относилось к Архимеду. К слову стоит отметить, что в [3], в отличие от [2], дано именно это определение, вместо евклидового определения прямой: «прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней» [6, стр.11] (Хотя у Туси это излагается немного по-другому: «... *и прямая из них (т.е. из линии) та которая расположена, таким образом, что какие бы то точки не предположить на ней, они будут находиться друг против друга»* [2]).

А также отмечается, что прямая между двумя точками единственна. Из этого можно заключить, что через две точки можно провести только одну прямую. И, что существование прямой – одно из тех знаний, осмысление которого не требует теоретического обоснования. Т.е. факт существования прямой есть постулат или аксиома.

А факт существования круга отличается от факта существования прямого отрезка тем, что он доказуем. И эта доказательность заключается в следующем: если проведен отрезок между центром и обхватывающим (окружностью) круга, вращая конец отрезка на окружности в некоторую другую часть, при несовпадении отрезков отсекая лишню, прибавляя недостающую части, их уравниваем. Таким образом, начерчиваем нужную фигуру – круг. По этому существования круга является доказуемым фактом. Эта конструкция оправдывается самим определением круга: *«круг эта фигура с одним обхватывающим, внутри которой имеется точка, все прямые отрезки, соединяющие ее (центр) с точками обхватывающего, равны между собой,...»* [2 и 3].

В свете этого можно понять, почему Туси так критически относится к конструкции ал-Хайсама относительно параллельных в своем произведении «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линии» [5]. Как известно этот трактат содержит различные «доказательства» постулата о параллельных прямых, в частности доказательства ал-Хайсама и Омар Хайяма. Метод ал-Хайсама заключается в движении выбранного перпендикуляра на заданной прямой. При этом по мнению ал-Хайсама линия начерченная свободным концом перпендикуляра есть параллельная прямая к заданной. Что оспоримо, по мнению Туси, с той точки зрения, что и в смысле евклидового и в смысле архимедового определения прямой, прямость полученной линии требует своего дополнительного доказательства, так как для линий, все точки которой равноудалены от заданной прямой, нельзя утверждать, что она обладает свойством «равно расположенности по отношению к точкам на ней» или «наикратчайшести расстояния между ее точками».

Таким образом, в геометрии Туси имеются либо существование, которое принимается аксиоматически-«существование из необходимых», либо его надо доказывать- «доказательное существование».

Здесь хотели бы уделить внимание на сущность геометрии с точки зрения определения прямой. Прямая может быть определена либо с помощью алгебраической структуры, если конечно заданы операции сложения векторов и умножения на скаляр. В этом случае, при заданности двух векторов x и y прямая есть множество всех точек

$$x + ky,$$

где k есть произвольный скаляр. Это есть уравнение прямой линии, проходящей через точку x и параллельно вектору y.

Второе определение дается с помощью экстремального свойства света «световой луч проходит расстояние между двумя точками за минимальное время». Туси использует именно это определение. И в определении «наикратчайшая линия между двумя точками», и в определении «находится друг против друга», в роли меры сверки выступает зрение. Этому можно найти подтверждение и в постулате: «(Должны предположить), что в любом направлении можем отложить ограниченную прямую» [2 и 3]. Т.е. свойства быть прямой соотносимо с направлением. О направлении говорится в одиннадцатом вопросе первой главы второго раздела [1] следующее:

«Направление есть край долготы, полученный при заданности указания». (стр*234)*

Под «заданностью указания» подразумевается долгота от указывающего до некоторого конечного пункта. А указание, конечно, есть путь, пройденный световым лучом.

Вообще пространство у Туси изотропно, т.е. оно однородно во всех направлениях, и его свойства инвариантны относительно сдвигов. Чему свидетельствует его утверждение в десятом вопросе первой главы второго раздела [1] об отрицании пустот-пробелов в пространстве:

«Пространство не имеет пустот- пробелов, в силу того, что если допустить возможность пустотных пробелов, то движение в случае среды с сопротивлением должно равняться движению в среде с более разреженным сопротивлением пропорционально отношению их времен». (стр. 234)

Не вдаваясь в подробности о взглядах Туси на движение отметим только, что движение это любое изменение. В случае механического движения это перемещение, а его количественная характеристика есть абсолютное значение самого перемещения, независимо от времени.

Аргументация в пользу утверждения, что «пространство не имеет пустотных пробелов», заключается в том, что если допустить возможность пустотных пробелов, то должны быть пространственные фрагменты которые дважды отличаются по своей густоте, сопротивления в которых тоже дважды должны разниться, и за одно и то же время пройденные расстояния тоже дважды должны отличаться. В противном случае, т.е. в предположении пустого пространственного фрагмента, для определенности предположим, что время прохождения данного расстояния равно одному часу. А в случае густого пространства равно двум часам. Тогда в два раза менее разреженной среде, время прохождения должно быть дважды меньше чем в густой среде, т.е один час. Таким образом, время прохождения данного расстояния в случае пустого и дважды разреженного пространства, но не пустого, должны быть равны. Что естественно невозможно.

Про равенство фигур

Как известно Туси как и Евклид равенство фигур понимал в смысле «равновеликости», т.е. если они «взаимоналожимы». Что, в чем то напоминает конечно-аддитивную меру Жордана. Для удобства мы будем писать $A > B$ ($A = B$) если площадь A больше (равна) площади B, а объединение и разность множеств, соответственно, через + и -. Как известно, аксиомы порядка и равенства Евклида суть следующие [6., книга первая]:

1. Транзитивность $A=B, C=B \Rightarrow A=C$

2-3. $A=B \forall C \Rightarrow A \pm C = B \pm C$. (У Туси в одном предложении [см. 2 и 3])

4. $A \neq B \forall C \Rightarrow A \pm C \neq B \pm C$

5. $A=B \Rightarrow 2A=2B$

6. $A=B \Rightarrow A/2=B/2$

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8. Целое больше части. Т.е $A \supset B \Rightarrow A > B$. Здесь и включение и сравнение оба строгие.

У Туси [см. 2 и 3] дополнительно имеется 4′. $A+C=B+C \vee A-C=B-C \Rightarrow A=B$, а в 5-ой и 6-ой аксиомах вместо двойки можно взять любое натуральное число.

В [6, стр. 252] имеется следующее замечание: «Интересно отметить, что современные математики, оперируя с актуальной бесконечностью, ставят характерным свойством для бесконечного множества именно равенство целого своей части, что для конечного не имеет место». Далее там же приводится парадокс Галилея: число членов рядов

$$1,2,3,\ldots \text{ и } 1^2,2^2,3^2,\ldots$$

не могут быть равны, так как целое больше своей части, а с другой стороны равны так как между членами этих рядов существует взаимно однозначное соответствие.

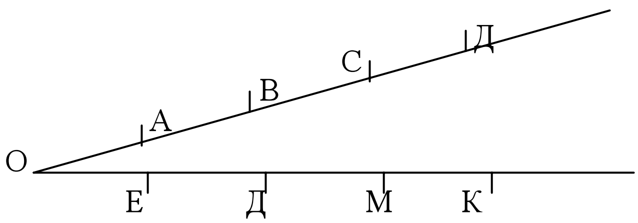
Но такой пример-парадокс и к тому же геометрический имеется у Туси и Хилли в первом вопросе третьей главы второго раздела [1]

«Все тела обладают общим свойством: обязательно быть ограниченными. Из-за обязательности того, что при предположении обратного, они должны быть сопоставимы своим уменьшенным аналогам при шкалировании». (стр. 255)

В данном тезисе, хотя и говорится о реальных физических телах, рассуждения носят сугубо абстрактно-научный характер. В этих рассуждениях Туси и его последователей можно проследить их взгляды на бесконечность и равенство фигур.

Комментарии Хилли вкратце заключаются в следующем: во-первых, если предположить, что размерности не ограниченные, то можно предположить, что существуют две бесконечные линии с одним и тем же началом (т.е. два луча ОА и ОВ). На первом луче выбирается некий отрезок ОА. После этого обе линии шкалируются с помощью этого отрезка и приводятся в соответствие, таким образом: первые, вторые, третьи и т.д. без конца точки сопоставляются между собой.

С другой стороны, от первого луча отрезается отрезок ОА и после этого между лучами АВ и ОЕ опять задается аналогичное взаимно однозначное соответствие. Таким образом, получается, что уменьшенный луч АВ равен превосходящему (лучу ОЕ).



В самом деле, это рассуждение есть доказательство того факта, что любое подмножество бесконечного множества, отличающегося от него на конечное множестве, есть бесконечное множество и равномощно исходному.

О пятом постулате

В [2 стр.4] имеется эквивалентные формулировки постулата о параллельных прямых:

«Говорю, что последнее предложение не принадлежит общеизвестным знаниям, аксиомам.(Прим.- переводчика) и не объяснимо кроме как в геометрической науке. Потому предпочтительно, чтобы оно было помещено вне вводных вопросов, чему и мы будем давать объяснение в приличествующем ему месте. И заменяю его другим, которое есть следующее: если прямые в одной плоскости удаляются в определенном направлении, то никакие из них не могут взаимо приближаться. В противном случае они взаимопересеклись бы. ... И что в объяснении другое предложение, которым пользуется Евклид в десятой книге и в других местах, заключается в следующем: для любых величин одного рода малая из них последовательным укратнением превосходит большую из них.

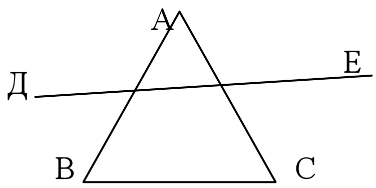
А также обязательно должно быть обусловлено, что одна и та же прямая может достичь данное направление, только с помощью максимум одной прямой из семейства прямых, которые взаимно не параллельны между собой.»

Отметим несколько моментов:

1. В [3] имеется только последнее утверждение.

2. Вместо понятия «постулаты» в арабских источниках буквально употреблены «обусловленные знания». Отсюда и видно, что Туси к постулатам относит только внутрипредметные утверждения. Следуя чему в отличие от Евклида, он переносит девятую аксиому [6]: -«И две прямые не содержат пространства» - в часть «Постулаты» перед постулатом о параллельных, говоря, что *«И две прямые не содержат поверхность»*. [2 и 3]

3. Относительно эквивалентного второго утверждения скажем, что современный читатель может даже не поймет его, думая, как могут приближаться взаимоудаляющиеся прямые? Но не стоит забывать, что геометрия Туси, как и Евклида, частично конструктивна. Линия есть порождение движения. Т. е. в отличие от современных теоретико-множественных представлений, в которых геометрическая фигура есть множество точек, которые в заданности не отстают по времени друг от друга, в то время задание геометрической фигуры не носило единовременный характер. Потому не стоит удивляться этому утверждению. В самом деле, данное утверждение должно быть понято следующим образом: «взаимоудаляющиеся прямые отрезки при каком бы то не было продолжении по прямым линиям не могут взаимоприближаться».



4. Третье утверждение называется аксиомой Архимеда. В системе аксиом вещественных чисел вместе с принципом Кантора о вложенных отрезках эта аксиома порождает полноту метрического пространства.

5. Последнее предложение встречается и в калькуттской версии. Из него можно получить аксиому Туси-Паша: «прямая, не проходящая через вершины треугольника, пересекающая одну из его сторон, обязательно пересекает одну из двух оставшихся сторон данного треугольника».

В самом деле, пусть прямая пересекает сторону AB. То в качестве семейства прямых можно брать две остальные стороны треугольника AC и BC, которые пересекаются в точке C, а потому удовлетворяют требованию данного утверждения. По этому данная прямая не может быть параллельна одновременно им обоим, т. е. она должна пересекаться с одной из этих сторон.

ЛИТЕРАТУРА

1.Хилли. Кешф ал-мурад фи шарх теджрид ал-э'тигад (Открытие желании в комментариях чистой веры. На арабском.) Тегеран: 2004-2005, 592 с.
2. Туси Н. Тахрир усул Углидис фи илм ал-хандаса (Комментария «Основы Евклида» в науке геометрии. На арабском) Тегеран: 1881, 210 с.
3. Туси Н. Ситтату магалат мин китаб тахрири ал-Углидис. (Шесть книг из комментариев Евклида., на арабском) Калкутта: 1824, 180 с.
4. Туси Н. Тахрири Оглидис (Комментария Евклида. Перевод Х.Зарриназаде с арабского на азербайджанский), Баку: 2001, 526 с.
5. Туси Н. Трактат исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий (Перевод с арабского Б.А.Розенфельда), ИМИ, 1960, VIII выпуск, стр. 483-532.
6. Начала Евклида. Книги 1-6 (Перевод с греческого Д.Д.Мордухай-Болтовского). М.-Л.: 1948, 448 с .

N.TUSİDƏ HƏNDƏSİ ANLAYIŞLARIN MAHİYYƏTİ HAQQINDA

A.A.BABAYEV, E.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə N.Tusinin fəlsəfi “Təcrid əl-etiqad” və Evklidin “Əsaslar”ına şərhlərinin müxtəlif versiyaları əsasında həndəsənin əsas anlayışlarına baxışları öyrənilir. Həmçinin varlıq, həndəsi fiqurların bərabərliyi, bərabərlik haqqında Evklidin aksiomatikasının ziddiyyətini göstərən paradoks, paralel düz xətlər haqqında beşinci postulatın müxtəlif formaları araşdırılır.

ON THE ESSENCE OF GEOMETRICAL NOTIONS OF N. TUSI

A.A.BABAYEV, E.M.MAMMADOV

SUMMARY

N.Tusi’s fundamental ideas of geometry on his philosophical work “**Abstractness of faith**” and various versions of his commentaries to Evklid’s “Basis” are studied along with the problem of existence, equality of geometrical figures, paradox demonstrating the contradiction of Evklid’s system of equality axiom, equivalent formations of fifth postulate about parallel lines in this article.